

ТІЗБЕК. ТІЗБЕКТИҢ ШЕГІ.

Шәкір Айдос Ғанижанұлы

әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

математика кафедрасының аға оқытушысы, PhD

2 қыркүйек 2024
Алматы, Қазақстан



Дәрістің мақсаты – тізбектің анықтамасын, оның жинақтылығын, Коши критерийін білу.

Негізгі сұрақтар:

- 1 Тізбектің анықтамасы және жинақтылығы
- 2 Коши критерийі. Іргелі тізбек



Анықтама 1.1.1. Егер натурал сандар жиынының $N = \{n\}$ әрбір n мәніне белгілі бір ереже бойынша x_n нақты саны сәйкестендірілсе, онда нөмірленген нақты сандар жиынын

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (1.1.1)$$

сан тізбегі немесе жай тізбек деп атайды.

$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ сандарын тізбектің мүшелері немесе элементтері деп, ал x_n тізбектің n мүшесі немесе жалпы мүшесі деп аталады. Тізбекті $\{x_n\}$ немесе x_n , $n \in \mathbb{N}$ арқылы белгілейді.

Кейде (1.1.1) тізбекті айнымалы x_n мәндер жиыны деп қарастырады. Сондықтан да x_n айнымалысы берілсе, онда (1.1.1) тізбегінің де берілгені. Осыған байланысты тізбекті кейде айнымалы шама деп атайды.



Мысалдар.

1) $x_n = \frac{1}{n}$ тізбегі мына сандардан құрастырылады:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

2) Егер $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ болса, тізбек мүшелері мына сандар:

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

3) $x_n = (-1)^n$ тізбегі мына сандардан тұрады:

$$-1, 1, -1, 1, \dots$$

4) $x_n = 1$ тізбегінің мүшелері:

$$1, 1, 1, 1, \dots$$

Бұдан тізбек мүшелері әртүрлі, екі саннан, тіпті бір саннан құралатынын көреміз.
Барлық элементтері тек бір ғана саннан тұратын тізбекті тұрақты тізбек деп атайды.



$\{x_n\}$ мен $\{y_n\}$ тізбектері берілсін.

Анықтама 1.1.2. $\{x_n\}$ мен $\{y_n\}$ тізбектердің қосындысы, айырмасы және көбейтіндісі деп сәйкесінше $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$ тізбектерін айтады.

Егер $y_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$ болса, онда $\{x_n\}$ тізбегін $\{y_n\}$ тізбегіне бөлгендегі қатынасы деп $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ тізбегін айтады.

Ескерту. Егер $\{y_n\}$ тізбегінде саны шекті элементтер нөлге тең болса, онда $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$

қатынасын $y_n \neq 0$ болатын нөмірден бастап анықтау керек.

Анықтама 1.1.3. Егер кез келген $n \in \mathbb{N}$ үшін $x_n < x_{n+1}$ (немесе $x_n > x_{n+1}$) болса, онда $\{x_n\}$ тізбегін өсетін (кемуші) деп атайды.

Анықтама 1.1.4. Егер кез келген $n \in \mathbb{N}$ үшін $M \in \mathbb{R}$ саны табылып, $x_n \leq M$ ($x_n \geq m$) теңсіздігі орындалса, онда $\{x_n\}$ тізбегін жоғарғы (төменгі) жағынан шектелген деп атайды.

Анықтама 1.1.5. Жоғарғы және төменгі жағынан шектелген тізбекті шектелген тізбек дейді, оны $|x_n| \leq K$, $\forall n \in \mathbb{N}$ түрінде жазады.

Соңғы анықтамаға эквивалентті анықтама беруге болады.

Анықтама 1.1.6. Егер $\{x_n\}$ тізбегі жоғары және төменгі жағынан шектелсе, онда оны шектелген дейді, яғни

$$m \leq x_n \leq M. \quad (1.1.2)$$



Эквиваленттілікті дәлелдеу үшін $m = -K$, $M = K$ деп алу жеткілікті. Керісінше, егер $m \leq x \leq M$ теңсіздігі орындалса, онда $K = \max\{|m|, |M|\}$ деп алсақ, $|x| \leq K$ теңсіздігі шығады.

Анықтама 1.1.7. Егер кез келген $A > 0$ саны үшін $\{x_n\}$ тізбегінің ең болмаса бір элементі табылып, $|x_n| > A$ теңсіздігі орындалса, онда бұл тізбекті шектелмеген деп атайды.

Егер $\{x_n\}$ тізбегі тек жоғары немесе төменгі жағынан ғана шектелсе, онда оның шектелмейтіндігі соңғы анықтамадан шығады.

Тізбектер кейде рекуррентті түрде беріледі. Осы жағдайда тізбектің n мүшесі оның алдыңғы мүшелері арқылы өрнектеледі. Мысалы, $x_n = x_{n-1} + d$, $b_n = b_{n-1}q$, $n = 2, 3, \dots$ теңдіктері бойынша сәйкесінше арифметикалық және геометриялық прогрессияларды құруға болады.

Енді тізбек шегі түсінігіне тоқталайық.

Анықтама 1.1.8. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ санына сәйкес $N = N(\varepsilon)$ натурал саны табылып, барлық $n \geq N$ мәндерінде

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad (1.1.3)$$

теңсіздігі орындалса, онда a санын $\{x_n\}$ тізбегінің шегі деп атайды да, оны былай жазады:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad (1.1.4)$$

немесе $n \rightarrow \infty$, $x_n \rightarrow a$ деп жазады.



Кванторлар тілінде жазылуы:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \geq N(\varepsilon)) : |x_n - a| < \varepsilon.$$

Анықтама 1.1.9. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ санына сәйкес $N = N(\varepsilon)$ натурал саны табылып, барлық $n > N$ мәндерінде

$$|x_n| > \varepsilon$$

теңсіздігі орындалса, онда $\{x_n\}$ тізбегі ∞ -ге (шексіздікке) ұмтылады (немесе шексіз үлкен) деп атайды да, оны былай жазады:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

немесе

$$n \rightarrow \infty, \quad x_n \rightarrow \infty.$$

Кванторлар тілінде:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \geq N(\varepsilon)) : |x_n| > \varepsilon.$$



Анықтама 1.1.10. $\varepsilon > 0$ саны табылып, әрбір натурал n санына сәйкес $N = N(n)$ натурал саны табылып, барлық $N(n) > n$ мәндерінде

$$|x_{N(n)} - a| \geq \varepsilon$$

теңсіздігі орындалса, онда a санын $\{x_n\}$ тізбегінің шегі емес деп атайды да, оны былай жазады:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq a$$

немесе

$$n \rightarrow \infty, \quad x_n \not\rightarrow a.$$

Кванторлық түрде:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq a \Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists N(n) > n) : |x_{N(n)} - a| \geq \varepsilon.$$

Егер кез келген a нақты саны үшін $\{x_n\}$ тізбегі a санына ұмтылмаса, онда оның нақты мәнді шегі жоқ (шегі жоқ) дейді.

Анықтама 1.1.11. Егер $\{x_n\}$ тізбегінің ақырлы шегі a бар болса, онда оны a санына жинақты дейді. Егер бұл тізбектің шегі жоқ немесе ∞ болса, онда оны жинақсыз дейді.



Анықтама 1.1.12. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ санына сәйкес $N = N(\varepsilon)$ натурал саны табылып, барлық $n \geq N$ мәндерінде

$$a - \varepsilon < x_n \leq a$$

теңсіздігі орындалса, онда $\{x_n\}$ тізбегі a санына сол жақтан (төменнен) ұмтылады деп атайды, оны былай жазады:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a - 0$$

немесе

$$n \rightarrow \infty, \quad x_n \uparrow a.$$

Кванторлар тілінде жазылуы:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a - 0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \geq N(\varepsilon)) : a - \varepsilon < x_n \leq a.$$

Анықтама 1.1.13. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ санына сәйкес $N = N(\varepsilon)$ натурал саны табылып, барлық $n \geq N$ мәндерінде

$$a \leq x_n < a + \varepsilon$$

теңсіздігі орындалса, онда $\{x_n\}$ тізбегі a санына оң жағынан (жоғарыдан) ұмтылады деп атайды да, оны былай жазады:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a + 0$$

немесе

$$n \rightarrow \infty, \quad x_n \rightarrow a + 0.$$



Кванторлар тілінде:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a + 0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \geq N(\varepsilon)) : a \leq x_n < a + \varepsilon.$$

Егер $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ болса және барлық $n = 1, 2, \dots$ үшін $x_n \leq a$ (немесе $x_n \geq a$) теңсіздігі орындалса, онда $\{x_n\}$ тізбегін a санына сол (оң) жағынан жинақты дейді де, оны былай жазады:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a - 0 \quad \text{немесе} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a + 0.$$

Егер $a = 0$ болса, онда $0 - 0$ және $0 + 0$ деп жазуға болады.

Тізбек шегінің геометриялық мағынасы.

Жоғарыдағы (1.1.3) теңсіздік келесі қос теңсіздікке эквивалент:

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon, \quad n > N.$$

Осыдан x_n мүшелері ($n > N$) a нүктесінің ε -аймағында жататынын көреміз. Егер a саны $\{x_n\}$ тізбегінің шегі болса, онда $N = N(\varepsilon)$ нөмірі табылады да, нөмірлері N -нен үлкен барлық x_n мүшелері $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ интервалында жатады, ал $x_1, x_2, \dots, x_N$ мүшелері бұл интервалдың сыртында жатады.

a нүктесінің ε -аймағын $U_\varepsilon(a)$ деп белгілейміз. Осы түсінікті пайдалана отырып, тізбек шегінің анықтамасын былай да беруге болады.



Анықтама 1.1.14. Егер нүктенің $U_\varepsilon(a)$ аймағында $\{x_n\}$ тізбегінің N нөмірінен бастап барлық элементтері жататын болса, яғни

$$x_n \in U_\varepsilon(a), \quad n > N,$$

онда $\{x_n\}$ тізбегі санына жинақты деп аталады.

1) Жоғарыдағы 1-мысалдағы $x_n = \frac{1}{n}$ тізбегінің шегі 0-ге тең болатынын көрсетейік. Осы мақсатпен кез келген $\varepsilon > 0$ санын алып, теңсіздікті қарастырамыз:

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon. \quad (2.1.5)$$

Теңсіздікті n бойынша шешсек,

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \implies n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Егер N үшін, мысалы, $\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ санын алсақ, онда кез келген $n > N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ болғанда (2.1.5) теңсіздіктің орындалатынын көреміз, мұндағы $\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor - \frac{1}{\varepsilon}$ санының бүтін бөлігі. Демек, берілген тізбектің шегі нөлге тең. Осы сияқты 2-мысалдағы тізбек шегі нөлге тең екенін дәлелдеуге болады.



2) Жоғарыдағы 4-мысалдағы $x_n = 1$ тізбегінің шегі бірге тең болатынын көрсетейік. Шынында, $a = 1$ нүктесінің $U_\varepsilon(1)$ аймағын алып, $N = 1$ десек, онда барлық $n > N$ нөмірлері үшін $x_n = 1 \in U_\varepsilon$ орындалады. Олай болса, 1 саны — берілген тізбектің шегі.

3) $\sin \frac{\pi n}{2}$ тізбегі жинақсыз. Шынында, тізбектің шегін десек, $0 < \varepsilon < 1$ шартын қанағаттандыратын ε санын алсақ, онда $U_\varepsilon(a)$ аймағының сыртында берілген тізбектің шексіз көп мүшелері жатады. Демек, a саны тізбектің шегі бола алмайды.

4) $x_n = (-1)^n$ тізбегінің шегі жоқ. Шынында, кері жорып, тізбектің шегі a саны бар дейік. Олай болса, кез келген $\varepsilon > 0$ саны (мысалы, $\varepsilon = \frac{1}{2}$) үшін N нөмірі табылады да кез келген $n > N$ үшін

$$|x_n - a| < \frac{1}{2}.$$

x_n айнымалысы $n = 2k$ болғанда 1 мәнін, ал $n = 2k - 1$ болғанда -1 мәнін қабылдайтындықтан

$$|1 - a| < \frac{1}{2} \quad \text{және} \quad |(-1) - a| < \frac{1}{2}.$$

Олай болса,

$$2 = |(1 - a) + (a - (-1))| \leq |1 - a| + |a - (-1)| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

яғни $2 < 1$. Бұл қайшылық тізбек a санына жинақты деп жоруымыздың дұрыс еместігін көрсетеді.



Егер $\lim a_n = A$, $\lim b_n = B$ болса, онда:

- $\lim(a_n + b_n) = A + B$;
- $\lim(a_n b_n) = AB$;
- Егер $B \neq 0$, $b_n \neq 0$, онда $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$;
- Егер c тұрақты болса, $\lim(ca_n) = cA$.

Есеп 1. (Жинақты тізбек және Коши тізбегі) Тізбек $a_n = \frac{1}{n}$. Көрсетіңіз: (а) a_n жинақты; (б) a_n Коши тізбегі.

Шешуі. (а) Кез келген $\varepsilon > 0$ үшін таңдаймыз $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Егер $n > N$ болса,

$$|a_n - 0| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Сондықтан $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, демек тізбек жинақты.

(б) Коши анықтамасы: кез келген $\varepsilon > 0$ үшін табу керек N сонда $m, n > N \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$. Егер $m, n > N$ болса (әлдебір $m > n$ деп алайық),

$$|a_m - a_n| = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| = \frac{m - n}{mn} \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Демек тізбек Коши тізбегі



Есеп 2. (Геометриялық тізбек) Тізбек $c_n = r^n$ берілген. Көрсеттіңіз: егер $|r| < 1$ болса, онда $c_n \rightarrow 0$.

Шешуі. $|r| < 1$ болғандықтан $|r|^n \rightarrow 0$ экспоненциалдық түрде (әрбір $\varepsilon > 0$ үшін бар N сонда $n > N \Rightarrow |r|^n < \varepsilon$). Сондықтан

$$|c_n - 0| = |r|^n \rightarrow 0,$$

яғни $c_n \rightarrow 0$.

Есеп 3. (Рекурренталық тізбек және шегі) Рекурренталық түрде анықталған тізбек:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + 3}{2}.$$

Табу: тізбектің шегі (бар болса) және дәлелдеңіз.

Шешуі. Егер тізбек жинақты болып, шегі L болса, онда шек шексіздікке жеткенде рекуррент формуладан

$$L = \frac{L + 3}{2}.$$

Енді теңдеуді шешеміз:

$$2L = L + 3 \Rightarrow L = 3.$$

(Енді шектелімдігі мен монотондығын тексереміз.) $a_1 = 1$. Есептейік a_2 :

$$a_2 = \frac{1 + 3}{2} = 2.$$

$a_3 = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$. Жалпы приростты тексереміз:



$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + 3}{2} - a_n = \frac{3 - a_n}{2}.$$

Егер $a_n < 3$ болса, онда $a_{n+1} - a_n > 0$, яғни өседі. Базалық $a_1 = 1 < 3$ болғандықтан индукция бойынша барлық мүшелері 3-тен кем және тізбек монотон өседі. Оның үстіне, әр мүшесі 3-тен кем, яғни шектелген. Монотон және шектелген болғандықтан тізбек жинақты, әрі $\lim a_n = 3$. **Есеп 4. (limsup және liminf)** Тізбек $d_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$. Табу:

$\limsup_{n \rightarrow \infty} d_n$ және $\liminf_{n \rightarrow \infty} d_n$.

Шешуі. Мүшелер бөлінеді жұп және тақ индекс бойынша:

$$\text{егер } n = 2k, \quad d_{2k} = (-1)^{2k} + \frac{1}{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \rightarrow 1,$$

$$\text{егер } n = 2k + 1, \quad d_{2k+1} = (-1)^{2k+1} + \frac{1}{2k+1} = -1 + \frac{1}{2k+1} \rightarrow -1.$$

Осыдан:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d_n = \max\left\{\lim_{k \rightarrow \infty} d_{2k}, \lim_{k \rightarrow \infty} d_{2k+1}\right\} = \max\{1, -1\} = 1,$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d_n = \min\{1, -1\} = -1.$$



Қосымша ақпарат

Студент толық ақпаратты [1], [2], [3], [4], [5], [6] жұмыстардан қарауға болады.



[Фихтенгольц Г.М.](#)

Основы математического анализа. – М., 1968, 1972, 1956, 1960, 1964, 1957, 2002.



[Демидович Б.П.](#)

Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М., 1997, 1990, 1977, 1962, 1998, 1969, 1966, 1958, 1956, 1952, 2002, 2004, 2006, 2005.



[Темірғалиев Н.](#)

Математикалық анализ. – Алматы, 1991.



[Кудрявцев Л.Д.](#)

Сборник задач по математическому анализу. – М., 1984, 1981, 1988, 2003.



[Ильин В.А., Позняк Э.Г.](#)

Основы математического анализа. Ч. 1. – М.: Наука, 1982, 1987, 1985, 2004, 2006



[Сатығұлова С., Исакова А.Қ., Айтжанов С.Е.](#)

Математикалық анализ I. – Алматы: Қазақ университеті, 2020. -236 б.



НАЗАРЛАРЫҢЫЗҒА
РАҚМЕТ!

